



الف

A

آمادگی کنکور ۱۴۰۰

O4F

D

دوپینگ ماز

آزمون دوپینگ ماز – ۱۴۰۰/۰۳/۲۵

دفترچه پاسخ ریاضی (رشته تجربی)

مدت پاسخ گویی: ۴۷ دقیقه

تعداد سؤال: ۳۰

طراح سؤال	ویراستاران
سیروس نصیری	سید جواد نظری
	ارسلان حسنونند

هر گونه انتشار و استفاده غیر قانونی از دوپینگ ماز با عدم رضایت گروه آموزشی ماز همراه بوده و شرعاً حرام است.

۱- اگر در معادله درجه دوم $mx^2 - (m+2)x - 2 = 0$ سه برابر مجموع ریشه‌ها از ۵ برابر حاصل ضرب ریشه‌ها هفت واحد بیشتر باشد، آن‌گاه مجموع مربعات ریشه‌ها چقدر است؟

$\frac{11}{4}$ (۲) $\frac{13}{2}$ (۳) $\frac{11}{2}$ (۴) $\frac{13}{4}$ (۱)

پاسخ: گزینه ۱

اگر ریشه‌ها را α و β فرض کنیم:

$$3(\alpha + \beta) = 5\alpha\beta + 7 \Rightarrow 3\left(\frac{m+2}{m}\right) = 5\left(\frac{-2}{m}\right) + 7 \xrightarrow{\times m} 3m + 6 = -10 + 5m$$

$$\Rightarrow 4m = 16 \Rightarrow m = 4 \Rightarrow \begin{cases} S = \alpha + \beta = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} \\ P = \alpha\beta = \frac{-2}{4} = \frac{-1}{2} \end{cases}$$

$$\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 2 \times \left(\frac{-1}{2}\right) = \frac{9}{4} + 1 = \frac{13}{4}$$

۲- مقدار عبارت $A = \frac{\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}} + \frac{1-\sqrt{2}}{2\sqrt{2}-1} - \frac{8\sqrt{2}}{7}$ کدام است ؟

$\frac{10\sqrt{2}}{7}$ (۴) $-\frac{10}{7}$ (۳) $-\frac{10\sqrt{2}}{7}$ (۲) $\frac{10}{7}$ (۱)

پاسخ: گزینه ۳

ابتدا عبارت‌ها را گویا می‌کنیم، سپس مخارج مشترک می‌گیریم:

$$A = \frac{\sqrt{2}(2-\sqrt{2})}{(2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})} + \frac{(1-\sqrt{2})(2\sqrt{2}+1)}{(2\sqrt{2}-1)(2\sqrt{2}+1)} - \frac{8\sqrt{2}}{7} \Rightarrow A = \frac{2\sqrt{2}-2}{4-2} + \frac{2\sqrt{2}+1-4-\sqrt{2}}{8-1} - \frac{8\sqrt{2}}{7}$$

$$A = \sqrt{2}-1 + \frac{\sqrt{2}-3}{7} - \frac{8\sqrt{2}}{7} = \frac{7\sqrt{2}-7+\sqrt{2}-3-8\sqrt{2}}{7} = \frac{-10}{7}$$

۳- اگر در بازه (a, b) ، تابع $y = |x^2 + x - 3|$ پایین‌تر از تابع $y = 3x$ قرار گیرد، حداکثر مقدار $b - a$ کدام است؟

$5 + \sqrt{7}$ (۱) $3 - \sqrt{7}$ (۲) $3 + \sqrt{7}$ (۳) $5 - \sqrt{7}$ (۴)

پاسخ: گزینه ۴

دقت کنید که در رابطه $|g(x)| < f(x)$ باید $f(x) > 0$ باشد تا نامعادله جواب داشته باشد.

$$|x^2 + x - 3| < 3x \xrightarrow{3x > 0} |x^2 + x - 3| < 3x$$

توجه کنید که نامعادله بالا فقط برای $x > 0$ جواب دارد.

$$|u| < |v| \Rightarrow (u-v)(u+v) < 0$$

به کمک رابطه روبه‌رو سوال را حل می‌کنیم:

$$|x^2 + x - 3| < 3x \Rightarrow (x^2 + x - 3 - 3x)(x^2 + x - 3 + 3x) < 0 \Rightarrow \underbrace{(x^2 - 2x - 3)(x^2 + 4x - 3)}_{p(x)} < 0$$

هرگونه انتشار و استفاده غیر قانونی از دوپینگ ماز با عدم رضایت گروه آموزشی ماز همراه بوده و شرعاً حرام است.



ریشه‌های دو معادله را بدست می‌آوریم و جدول تعیین علامت می‌کشیم:

$$x^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow x = -1, 3$$

$$x^2 + 4x - 3 = 0 \Rightarrow x = -2 \pm \sqrt{7}$$

x	$-\infty$	$-2 - \sqrt{7}$	-1	$-2 + \sqrt{7}$	3	$+\infty$
p(x)	+	.	-	.	-	+

نامعادله فقط برای $x > 0$ جواب دارد، پس جواب نامعادله $p(x) < 0$ در x های مثبت برابر $(\sqrt{7} - 2, 3)$ می‌باشد. پس بیشترین مقدار $b - a$ برابر $5 - \sqrt{7}$ خواهد بود.

۴- ۱۰ نفر به چند طریق در یک صف می‌ایستند، به طوری که دو فرد خاص پشت سر هم نباشند؟

$$10! (4)$$

$$2 \times 9! (3)$$

$$8 \times 9! (2)$$

$$9 \times 9! (1)$$

پاسخ: گزینه ۲

برای آنکه دو نفر خاص پشت سرهم نباشند، کل حالات را از حالتی که این دو نفر پشت هم باشند، کم می‌کنیم:

$$10! - 9! \times 2! = 10 \times 9! - 2 \times 9! = 8 \times 9!$$

۵- در یک گروه داده آماری، تعداد داده‌های کمتر از چارک سوم و بیشتر از چارک اول ۷ تاست، اگر چارک‌های اول و سوم جزء داده‌ها نباشد، واریانس داده‌های کمتر از چارک اول و بیشتر از چارک سوم که جملات متوالی دنباله حسابی با قدر نسبت ۴ هستند، چقدر است؟

$$\frac{138}{3} (4)$$

$$\frac{150}{3} (3)$$

$$\frac{140}{3} (2)$$

$$\frac{146}{3} (1)$$

پاسخ: گزینه ۲

به راحتی معلوم می‌شود که عدد وسط ۷ داده مورد نظر، میانه (چارک دوم) خواهد بود، پس باید ۳ داده قبل از چارک اول و سه داده بیشتر از چارک سوم باشد. حال برای ۶ داده که جملات متوالی دنباله حسابی‌اند، واریانس برابر است با:

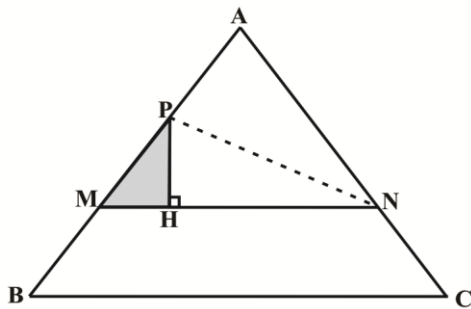
$$\sigma^2 = \frac{d^2}{12} (N^2 - 1) = \frac{16}{12} (6^2 - 1) = \frac{4}{3} \times 35 = \frac{140}{3}$$

$\begin{array}{ccccccc} & & & \text{تا } 7 & & & \\ & & & \text{○ ○ ○ ○ ○ ○ ○} & & & \\ \square & & & \square & & & \square \\ \downarrow & & & \downarrow & & & \downarrow \\ Q_1 & & & Q_2 & & & Q_3 \end{array}$

هرگونه انتشار و استفاده غیر قانونی از دوپینگ ماز با عدم رضایت گروه آموزشی ماز همراه بوده و شرعاً حرام است.



۶- در شکل زیر، $MN \parallel BC$ ، $AM = 2ME$ است. از N به وسط AM (نقطه P) وصل می‌کنیم و از P عمود PH را بر MN فرود می‌آوریم. اگر مساحت مثلث ABC ، ۱۸ برابر مساحت مثلث PMH باشد، نسبت $\frac{NH}{MH}$ چقدر است؟



۴ (۱)

۴/۵ (۲)

۳/۵ (۳)

۳ (۴)

پاسخ: گزینه ۴

$$\frac{AM}{AB} = \frac{2}{3} \Rightarrow S_{ABC} = \left(\frac{3}{2}\right)^2 S_{AMN} = \frac{9}{4} S_{AMN} \quad (۱)$$

در مثلث AMN ، نقطه P وسط ضلع AM است، پس $S_{APN} = S_{NPM}$.

$$(۱): S_{ABC} = \frac{9}{4} \times 2 S_{PMN} = \frac{9}{2} S_{PMN} \quad (۲)$$

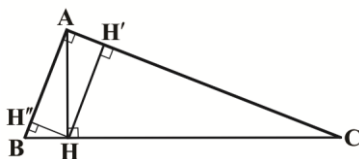
دو مثلث PMH و PMN هم ارتفاع هستند، پس نسبت مساحت‌های آنها برابر نسبت قاعده‌هاست:

$$\frac{S_{PMN}}{S_{PMH}} = \frac{MN}{MH} = \frac{HM + HN}{MH} = 1 + \frac{NH}{MH} \quad (۳)$$

از رابطه‌های (۲) و (۳) نتیجه می‌گیریم که:

$$S_{ABC} = \frac{9}{2} \left(1 + \frac{NH}{MH}\right) S_{PMH} \xrightarrow{S_{ABC} = 18 S_{PMH}} 18 = \frac{9}{2} \left(1 + \frac{NH}{MH}\right) \Rightarrow 1 + \frac{NH}{MH} = 4 \Rightarrow \frac{NH}{MH} = 3$$

۷- در شکل زیر، ارتفاع هر ۳ مثلث قائم الزاویه رسم شده است. اگر مساحت مثلث $HH'C$ چهار برابر مساحت مثلث $HH''B$ باشد و $BH'' = x$ ، $HH' = 3x - 2$ باشد، مقدار x چقدر است؟



۲/۵ (۱)

۳ (۲)

۲ (۳)

۱ (۴)

پاسخ: گزینه ۳

زوایای مساوی را در شکل مشخص کرده‌ایم. دو مثلث $HH'C$ و $BH''H$ متشابه‌اند. با توجه به اینکه نسبت مساحت‌ها برابر ۴ است، نسبت اضلاع برابر ۲ خواهد بود.

$$\frac{HH'}{BH''} = 2 \Rightarrow \frac{3x - 2}{x} = 2 \Rightarrow x = 2$$

هر گونه انتشار و استفاده غیر قانونی از دوبینگ ماز با عدم رضایت گروه آموزشی ماز همراه بوده و شرعاً حرام است.

۸- اگر جمله اول، دوم و چهارم یک دنباله هندسی نزولی به ترتیب x ، 1 ، $\frac{x}{27}$ باشد، جمله سوم دنباله کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{9}$ (۲) $\frac{1}{3}$ (۳) 1 (۴) $\frac{1}{27}$

پاسخ: گزینه ۲

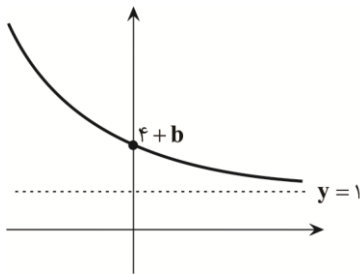
با توجه به مفهوم قدرنسبت:

$$\frac{t_4}{t_2} = \left(\frac{t_2}{t_1}\right)^2 \Rightarrow t_4 t_1^2 = t_2^3 \Rightarrow \frac{x}{27} \times x^2 = 1 \Rightarrow x^3 = 27 \Rightarrow x = 3$$

$$r = \frac{1}{3}, t_3 = 1 \times \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

دنباله به صورت $\frac{1}{9}, \frac{1}{3}, 1, 3$ خواهد بود:

۹- نمودار زیر مربوط به تابع $f(x) = a + 2^{bx+1}$ است. $f^{-1}(4)$ کدام است؟



(۱) $\log_2\left(\frac{2}{3}\right)$

(۲) $\log_3\left(\frac{2}{3}\right)$

(۳) $\log_2\left(\frac{2}{3}\right)$

(۴) $\log_2\left(\frac{4}{3}\right)$

پاسخ: گزینه ۳

تابع مورد نظر از تغییر تابع نمایی 2^x ساخته شده است، پس به راحتی معلوم می شود که $a=1$ است. در نتیجه $f(x) = 1 + 2^{bx+1}$ می باشد. همچنین طبق نمودار $f(0) = 4+b$ است.

$$f(0) = 1 + 2^{b \cdot 0 + 1} = 4 + b \Rightarrow b = -1 \Rightarrow f(x) = 1 + 2^{1-x}$$

برای محاسبه $f^{-1}(4)$ ، تابع را برابر ۴ قرار می دهیم:

$$f(x) = 4 \Rightarrow 1 + 2^{1-x} = 4 \Rightarrow 2^{1-x} = 3 \Rightarrow 1-x = \log_2 3 \Rightarrow x = 1 - \log_2 3 = \log_2 2 - \log_2 3 = \log_2\left(\frac{2}{3}\right)$$

۱۰- اگر $g(x) = 2 + 2 \sin x$ و $f(x) = 4x - x^2$ باشد، برد تابع $(f \circ g)(x)$ کدام است؟

- (۱) $\mathbb{R}$ (۲) $[-2, 2]$ (۳) $[0, 4]$ (۴) $[1, 5]$

پاسخ: گزینه ۳

برای محاسبه برد تابع $f \circ g(x)$ باید ابتدا دامنه آن را بدست آوریم و از روی آن برد را محاسبه کنیم. در واقع مکانیزم ورود و خروج در $f \circ g(x)$ را کنترل می کنیم.

$$x \longrightarrow g \longrightarrow g(x) \longrightarrow f \longrightarrow f \circ g(x)$$

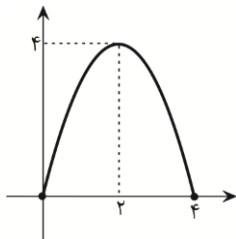
هرگونه انتشار و استفاده غیر قانونی از دوبینگ ماز با عدم رضایت گروه آموزشی ماز همراه بوده و شرعاً حرام است.



ابتدا x وارد g می‌شود، خروجی $g(x)$ می‌دهد، سپس $g(x)$ وارد f می‌شود و خروجی $fog(x)$ می‌دهد.

$$x \longrightarrow [g] \xrightarrow{2+2\sin x} [f] \longrightarrow f(2+2\sin x)$$

در این سوال، $x \in \mathbb{R}$ وارد g می‌شود، خروجی آن $2+2\sin x$ است که برد آن $0 \leq g(x) \leq 4$ است. این بازه یعنی $[0, 4]$ را به عنوان ورودی f در نظر می‌گیریم. بهتر است، نمودار تابع $f(x)$ را در فاصله $[0, 4]$ رسم کنیم.



ملاحظه می‌کنید که برد تابع fog برابر $[0, 4]$ است.

$$11 - \text{اگر تابع } f(x) = \begin{cases} a|x-1|+b+2a & x < 1 \\ b(x+1)^2 - cx^2 + dx + e & x \geq 1 \end{cases} \text{ یک تابع همانی باشد، } c+d+e \text{ چقدر است؟}$$

۴ (۱)
۳ (۲)
-۵ (۳)
۵ (۴)

پاسخ: گزینه ۳

برای آن که $f(x)$ معادل با تابع همانی باشد، باید هر ضابطه معادل با $y=x$ باشد.

$$x < 1 \Rightarrow x-1 < 0 \Rightarrow a|x-1|+b+2a = a(1-x)+b+2a = -ax+b+3a$$

اگر $-ax+b+3a$ همانی باشد:

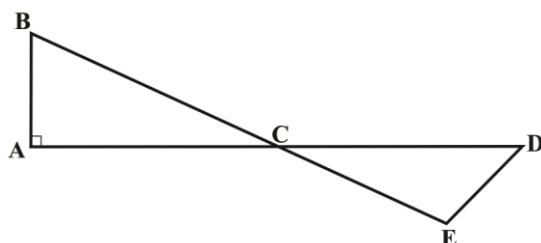
$$\begin{cases} -a=1 \Rightarrow a=-1 \\ b+3a=0 \xrightarrow{a=-1} b=3 \end{cases}$$

$$b(x+1)^2 - cx^2 + dx + e = (b-c)x^2 + (2b+d)x + b+e \quad (1)$$

اگر رابطه (۱) معادل با تابع همانی باشد، آن‌گاه:

$$\left. \begin{aligned} b-c=0 & \xrightarrow{b=3} c=3 \\ 2b+d=1 & \xrightarrow{b=3} d=-5 \\ b+e=0 & \xrightarrow{b=3} e=-3 \end{aligned} \right\} c+d+e=-5$$

۱۲- در شکل مقابل، $AC=40$ ، $AB=9$ است، اگر $DC=41$ و $CE=16$ باشد، مساحت مثلث CDE چقدر است؟



- ۷۳ (۱)
- ۷۰ (۲)
- ۷۲ (۳)
- ۷۴ (۴)

پاسخ: گزینه ۳

هرگونه انتشار و استفاده غیر قانونی از دوپینگ ماز با عدم رضایت گروه آموزشی ماز همراه بوده و شرعاً حرام است.



برای ساده‌تر شدن محاسبه، فرض می‌کنیم که $AC = 40x$ باشد، در این صورت $AB = 9x$ خواهد شد. حال رابطه فیثاغورس را در مثلث ABC اعمال می‌کنیم:

$$\Delta ABC: BC^2 = AB^2 + AC^2 \Rightarrow BC^2 = (9x)^2 + (40x)^2 \Rightarrow BC = 41x$$

$$\sin \hat{C}_1 = \sin \hat{C}_2 = \frac{AB}{BC} = \frac{9x}{41x} = \frac{9}{41}$$

$$S_{CDE} = \frac{1}{2} \times CE \times CD \sin \hat{C}_2 = \frac{1}{2} \times 16 \times 41 \times \frac{9}{41} = 8 \times 9 = 72$$

۱۳- چهار نقطه روی تابع $f(x) = 2 - |x|$ وجود دارد که فاصله آن‌ها از نقطه‌ای به عرض ۲- روی محور y ها برابر $\sqrt{10}$ است. حاصل ضرب عرض‌های این چهار نقطه کدام است؟

- ۴ (۴) ۱ (۳) -۱ (۲) -۴ (۱)

پاسخ: گزینه ۳

نقاط روی تابع f را به صورت $M(a, 2 - |a|)$ در نظر می‌گیریم. فاصله M از نقطه $B(0, -2)$ را برابر $\sqrt{10}$ قرار می‌دهیم.

$$|MB| = \sqrt{a^2 + (4 - |a|)^2} = \sqrt{10} \Rightarrow |a|^2 + 16 - 8|a| + |a|^2 = 10$$

$$\Rightarrow 2|a|^2 - 8|a| + 6 = 0 \xrightarrow{\div 2} |a|^2 - 4|a| + 3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} |a| = 1 \Rightarrow a = \pm 1 \\ |a| = 3 \Rightarrow a = \pm 3 \end{cases}$$

نقاط مورد نظر $M_1(1, 1)$ و $M_2(-1, 1)$ و $M_3(3, -1)$ و $M_4(-3, -1)$ است. حاصل ضرب عرض‌های این چهار نقطه برابر ۱ است.

۱۴- تابع $f(x) = x^3[x] - [-x]\sin x$ با دامنه $-1 < x < 0$ مفروض است. مقدار $f^{-1}(7 + 8f(-\frac{1}{4}))$ کدام است؟

- ۸ (۴) -۲ (۳) ۸ (۲) ۲ (۱)

پاسخ: گزینه ۳

با دامنه داده شده، ضابطه تابع ساده‌تر می‌شود.

$$\begin{cases} -1 < x < 0 \Rightarrow [x] = -1 \\ -1 < x < 0 \Rightarrow 0 < -x < 1 \Rightarrow [-x] = 0 \end{cases} \Rightarrow f(x) = -x^3 \Rightarrow f^{-1}(x) = -\sqrt[3]{x}$$

$$f^{-1}(7 + 8f(-\frac{1}{4})) = f^{-1}(7 + 8 \times \frac{1}{8}) = f^{-1}(8) = -2$$

۱۵- اگر باقی‌مانده $p(x)$ بر $x^2 + x - 2$ برابر $3x + 2$ باشد، باقی‌مانده تقسیم $g(x) = p(x) + p(x-3)$ بر $x-1$ چقدر است؟

- ۱ (۴) ۵ (۳) ۱ (۲) ۴ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

باقی‌مانده $p(x)$ بر $x^2 + x - 2$ برابر $3x + 2$ است، طبق امتحان تقسیم داریم:

$$p(x) = (x^2 + x - 2)q(x) + 3x + 2 = (x-1)(x+2)q(x) + 3x + 2$$

هرگونه انتشار و استفاده غیر قانونی از دوبینگ ماز با عدم رضایت گروه آموزشی ماز همراه بوده و شرعاً حرام است.



رابطه بالا یک اتحاد است و برای هر x برقرار است:

$$x=1 \Rightarrow p(1)=5$$

$$x=-2 \Rightarrow p(-2)=-4$$

برای محاسبه باقی مانده تقسیم $g(x)$ بر $x-1$ کافی است $g(1)$ را بدست آوریم:

$$g(x)=p(x)+p(x-3) \Rightarrow g(1)=p(1)+p(-2)=5-4=1$$

۱۶- اگر $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3^{2x+1} - 4^{x+1}}{9^{x+a} - 8^x} = \sqrt{3}$ باشد، مقدار $[a - \sqrt{3}]$ چقدر است؟

(۴) صفر

(۳) -۲

(۲) ۱

(۱) -۱

پاسخ: گزینه ۳

در محاسبه حدهای $\frac{\infty}{\infty}$ توابع نمایی، بایستی بزرگترین‌ها (یعنی جملات با رشد سریع‌تر) را از صورت و مخرج انتخاب کنیم.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3^{2x+1} - 4^{x+1}}{9^{x+a} - 8^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3^{2x} \times 3^1 - 4^x \times 4^1}{9^x \times 9^a - 8^x} = 3^{1-2a}$$

$$3^{1-2a} = \sqrt{3} \Rightarrow 1-2a = \frac{1}{2} \Rightarrow 2a = \frac{1}{2} \Rightarrow a = \frac{1}{4}$$

$$[a - \sqrt{3}] = [\frac{1}{4} - \sqrt{3}] = [0.25 - 1.73] = [-1.48] = -2$$

۱۷- مقدار $\lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{[\sin x] + \frac{2}{3}}{16 - x^2}$ کدام است؟

(۴) -۱

(۳) صفر

(۲) $+\infty$

(۱) $-\infty$

پاسخ: گزینه ۲

توجه داشته باشید که در توابع مثلثاتی اعداد بدون واحد، رادیان محسوب می‌شوند، در واقع $\sin 4$ یعنی $\sin(4^{\text{rad}})$.
۴ رادیان در ناحیه سوم دایره مثلثاتی و سینوس آن منفی است، پس:

$$\pi < 4 < \frac{3\pi}{2} \Rightarrow -1 < \sin 4 < 0 \Rightarrow [\sin 4] = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{[\sin x] + \frac{2}{3}}{16 - x^2} = \frac{-1 + \frac{2}{3}}{16 - 16^+} = \frac{-\frac{1}{3}}{0^-} = +\infty$$

۱۸- اگر $f(x) = \frac{ax - \sqrt{x+2}}{2x^2 + x - 10}$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} (xf(x))$ موجود باشد، حاصل $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ کدام است؟

(۴) $\frac{1}{2}$

(۳) ۲

(۲) ۱

(۱) $-\frac{1}{2}$

پاسخ: گزینه ۴

چون حد مخرج کسر تابع $f(x)$ در $x=2$ برابر صفر است، پس باید حد صورت کسر هم برابر صفر شود.

هرگونه انتشار و استفاده غیر قانونی از دوبینگ ماز با عدم رضایت گروه آموزشی ماز همراه بوده و شرعاً حرام است.



$$\lim_{x \rightarrow 2} (ax - \sqrt{x+2}) = 0 \Rightarrow 2a - 2 = 0 \Rightarrow a = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (xf(x)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - x\sqrt{x+2}}{2x^2 + x - 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2}$$

۱۹- اگر $g(x) = \frac{\sqrt{x}}{x-3}$ ، $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \sqrt{x+2}$ باشد، مقدار $(f \circ g)'(4)$ کدام است؟

(۴) $-3/5$

(۳) -4

(۲) 4

(۱) $3/5$

پاسخ: گزینه ۴

از قوانین مشتق گیری زیر استفاده می کنیم:

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}, \quad y = \frac{u}{v} \Rightarrow y' = \frac{u'v - v'u}{v^2}, \quad (f \circ g)'(x) = g'(x)f'(g(x))$$

$$g(x) = \frac{\sqrt{x}}{x-3} \Rightarrow g'(x) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(x-3) - \sqrt{x}}{(x-3)^2}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \sqrt{x+2} \Rightarrow f'(x) = \sqrt{x+2}$$

$$(f \circ g)'(4) = g'(4)f'(g(4)) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{4}}(4-3) - \sqrt{4}}{(4-3)^2} f'(\frac{\sqrt{4}}{4-3}) = \frac{-\frac{1}{2}}{1} f'(\frac{1}{3}) = \frac{-1}{2} f'(\frac{1}{3}) = \frac{-1}{2} \times \sqrt{\frac{1}{3}+2} = \frac{-1}{2} \times \sqrt{\frac{7}{3}} = \frac{-\sqrt{21}}{2}$$

۲۰- اگر تابع $f(x) = \begin{cases} a\sqrt{x} - b & x > 1 \\ 2 & x = 1 \\ 2ax - 8 & x < 1 \end{cases}$ نقطه گوشه‌ای داشته باشد، شیب نیم مماس راست در آن نقطه کدام است؟

(۴) $\frac{5}{2}$

(۳) $\frac{7}{2}$

(۲) $\frac{3}{2}$

(۱) $\frac{1}{2}$

پاسخ: گزینه ۴

تابع $f(x)$ در $x=a$ گوشه‌دار است، به شرطی که در آن نقطه پیوسته باشد، اما مشتق چپ و راست آن نابرابر باشد. مفهوم این سوال این است که تابع در $x=1$ پیوسته باشد.

$$f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f = \lim_{x \rightarrow 1^-} f \Rightarrow \begin{cases} a-b=2 \\ 2a-8=2 \Rightarrow a=5 \end{cases}$$

شیب نیم مماس راست این تابع، برابر مشتق راست در $x=1$ است، برای این منظور از ضابطه اول مشتق می گیریم:

$$y' = \frac{a}{2\sqrt{x}} = \frac{5}{2\sqrt{x}} \Rightarrow y'(1) = \frac{5}{2}$$

۲۱- تابع $f(x) = x^3 - 4x^2 - x - 12$ در بازه $[a, b]$ نزولی اکید است، بیشترین مقدار $b-a$ کدام است؟

(۴) $\frac{1}{3}\sqrt{19}$

(۳) $\frac{5}{3}\sqrt{19}$

(۲) $\frac{4}{3}\sqrt{19}$

(۱) $\frac{2}{3}\sqrt{19}$

پاسخ: گزینه ۱

هرگونه انتشار و استفاده غیر قانونی از دوبینگ ماز با عدم رضایت گروه آموزشی ماز همراه بوده و شرعاً حرام است.



مشتق اول تابع را تعیین علامت می‌کنیم:

$$f'(x) = 3x^2 - 8x - 1 : \Delta > 0$$

x	x ₁	x ₂
f'(x)	+	-

در واقع تابع f در بازه [x₁, x₂] نزولی اکید است که x₁ و x₂ ریشه‌های f' = 0 می‌باشند. خواسته سوال، b - a، یعنی فاصله ریشه‌هاست.

$$|b - a| = |x_2 - x_1| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} = \frac{\sqrt{64 + 12}}{3} = \frac{2}{3} \sqrt{9}$$

۲۲- عرض نقطه بحرانی تابع $f(x) = x - \sqrt{1 - x^2}$ در فاصله (۱، -۱) کدام است؟

- (۱) $\sqrt{2}$ (۲) -۲ (۳) ۲ (۴) $-\sqrt{2}$

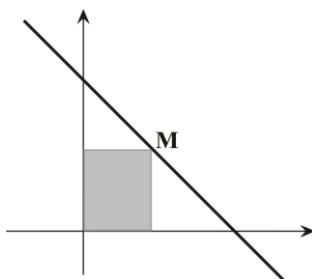
پاسخ: گزینه ۴

$$f'(x) = 1 - \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\sqrt{1-x^2} + x}{\sqrt{1-x^2}} = 0 \Rightarrow \sqrt{1-x^2} + x = 0 \Rightarrow \sqrt{1-x^2} = -x \Rightarrow 1 - x^2 = x^2 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{2}$$

$$\frac{x < 0}{\rightarrow} x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}} - \sqrt{1 - \frac{1}{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{2}{\sqrt{2}} = -\sqrt{2}$$

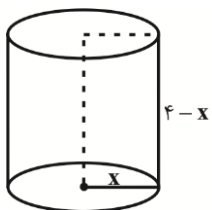
۲۳- مستطیل محاط شده در شکل زیر که M روی خط $x + y = 4$ می‌گذرد را حول محور y ها دوران می‌دهیم، اگر حجم جسم حاصل ماکزیمم شود عرض نقطه M کدام است؟



- (۱) $\frac{27}{8}$ (۲) $\frac{4}{3}$ (۳) $\frac{8}{3}$ (۴) $\frac{3}{8}$

پاسخ: گزینه ۲

اگر $M(x, 4 - x)$ فرض شود، پس از دوران مستطیل، استوانه زیر بدست می‌آید.



$$V = \pi x^2 (4 - x) = \pi(4x^2 - x^3)$$

$$V' = \pi(8x - 3x^2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow V = 0 \\ x = \frac{4}{3} \Rightarrow V = \max \end{cases}$$

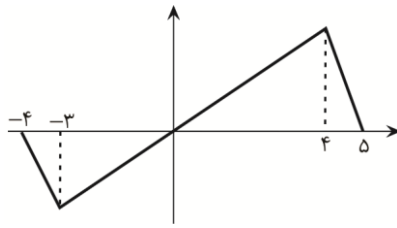
$$y_M = 4 - x_M = 4 - \frac{4}{3} = \frac{8}{3}$$

پس در $x = \frac{4}{3}$ حجم ماکزیمم می‌شود:

هرگونه انتشار و استفاده غیر قانونی از دوپینگ ماز با عدم رضایت گروه آموزشی ماز همراه بوده و شرعاً حرام است.



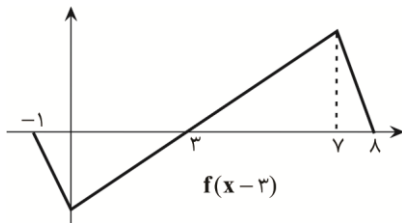
۲۴- اگر نمودار زیر مربوط به تابع $f(x)$ باشد، تابع $g(x) = |f(x-3)|$ در کدام فاصله نزولی اکید است؟



- (۱) $[0, 7]$
- (۲) $[-1, 0]$
- (۳) $[-1, 3]$
- (۴) $[1, 2]$

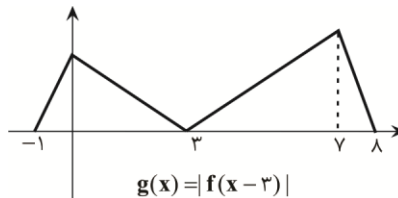
پاسخ: گزینه ۴

نمودار تابع $g(x)$ را طبق مراحل زیر رسم می‌کنیم.



$$f(x) \longrightarrow f(x-3) \longrightarrow |f(x-3)|$$

حال، برای رسم $g(x)$ باید قسمت‌های زیر محور x را به بالای آن متقارن کنیم.



ملاحظه می‌کنید که تابع g در فاصله‌های $[0, 3]$ و $[7, 8]$ نزولی اکید است، پس در فاصله $[1, 2]$ نیز نزولی اکید خواهد بود.

۲۵- در مراسمی، ۶ خانواده و از هر خانواده ۲ نفر شرکت کرده‌اند. ۴ نفر از بین آن‌ها انتخاب می‌کنیم، با چه احتمالی حداقل یک خانواده انتخاب می‌شود؟

- (۱) $\frac{25}{33}$
- (۲) $\frac{15}{33}$
- (۳) $\frac{19}{33}$
- (۴) $\frac{17}{33}$

پاسخ: گزینه ۴

روش اول:

حداقل یک خانواده در این سوال، یعنی یک خانواده یا دو خانواده انتخاب شوند.

$$P(A) = \frac{\binom{6}{1} \binom{5}{1} \binom{2}{1} \binom{2}{1} + \binom{6}{2}}{\binom{12}{4}} = \frac{6 \times 10 \times 2 \times 2 + \frac{6 \times 5}{2}}{\frac{12 \times 11 \times 10 \times 9}{4 \times 3 \times 2 \times 1}} = \frac{6 \times 10 \times 2 \times 2 + 3 \times 5}{11 \times 5 \times 9} = \frac{17}{33}$$

روش دوم:

از حالت متمم کمک می‌گیریم و فرض می‌کنیم که ۴ نفر انتخابی از خانواده‌های جداگانه‌ای باشند و هیچ دو نفری متعلق به یک خانواده نباشند:

$$P(A') = \frac{\binom{6}{4} \binom{2}{1} \binom{2}{1} \binom{2}{1} \binom{2}{1}}{\binom{12}{4}} = \frac{16}{33} \Rightarrow P(A) = 1 - P(A') = 1 - \frac{16}{33} = \frac{17}{33}$$

هرگونه انتشار و استفاده غیر قانونی از دوبینگ ماز با عدم رضایت گروه آموزشی ماز همراه بوده و شرعاً حرام است.



۲۶- سه شرکت A, B, C به ترتیب ۱۰, ۴۰ و ۵۰ درصد خودروهای داخل کشور را تولید می‌کنند. احتمال اینکه این سه شرکت خودروی صفر و سالم تولید کنند، به ترتیب ۵۰, ۶۰ و ۷۰ درصد است. خودروی صفر تحویل داده شده به یک مشتری سالم نیست، با چه احتمالی این خودروی ناسالم محصول شرکت C بوده است؟

$$\frac{15}{36} \quad (۴)$$

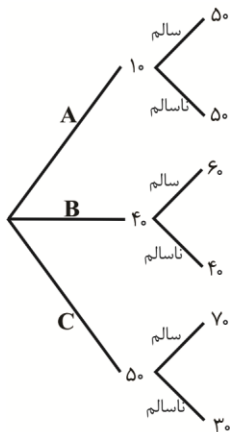
$$\frac{17}{36} \quad (۳)$$

$$\frac{19}{36} \quad (۲)$$

$$\frac{13}{36} \quad (۱)$$

پاسخ: گزینه ۴

بهترین روش حل این نوع سوالات، رسم نمودار درختی است.



$$P(C | \text{ناسالم از شرکت C}) = \frac{50 \times 30}{50 \times 30 + 40 \times 40 + 10 \times 50} = \frac{5 \times 3}{5 \times 3 + 4 \times 4 + 1 \times 5} = \frac{15}{15 + 16 + 5} = \frac{15}{36}$$

۲۷- یکی از دسته جواب‌های معادله $2 \cos x - 3 = \frac{2}{\sin(\frac{5\pi}{2} - x)}$ کدام است؟

$$2k\pi - \frac{2\pi}{3} \quad (۴)$$

$$2k\pi - \frac{\pi}{3} \quad (۳)$$

$$2k\pi + \frac{\pi}{3} \quad (۲)$$

$$\frac{k\pi}{3} \quad (۱)$$

پاسخ: گزینه ۴

در معادله کسینوسی:

$$\cos x = \cos \alpha \Rightarrow x = 2k\pi \pm \alpha, k \in \mathbb{Z}$$

$$2 \cos x - 3 = \frac{2}{\sin(\frac{5\pi}{2} - x)} \Rightarrow 2 \cos x - 3 = \frac{2}{\cos x} \Rightarrow 2 \cos^2 x - 3 \cos x - 2 = 0$$

$$\Rightarrow (\cos x - 2)(2 \cos x + 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \cos x = 2 & \text{غقی} \\ \cos x = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

فقط معادله $\cos x = -\frac{1}{2}$ جواب دارد.

$$\cos x = -\frac{1}{2} \Rightarrow \cos x = \cos \frac{2\pi}{3} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}$$

هرگونه انتشار و استفاده غیر قانونی از دوبینگ ماز با عدم رضایت گروه آموزشی ماز همراه بوده و شرعاً حرام است.



۲۸- اگر $f(x) = (2\cos^2 x - 1)^2 (\cos^2 x - \cos^4 x)$ باشد، مقدار $f(\frac{\pi}{12})$ چقدر است؟

$\frac{7}{64}$ (۴)

$\frac{1}{64}$ (۳)

$\frac{5}{64}$ (۲)

$\frac{3}{64}$ (۱)

پاسخ: گزینه ۱

به کمک روابط زیر مسئله را حل می‌کنیم.

$$\cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1, \quad \sin 2\alpha = 2\sin \alpha \cos \alpha$$

$$f(x) = (2\cos^2 x - 1)^2 \times \cos^2 x (1 - \cos^2 x) = (\cos^2 2x)(\cos^2 x)(\sin^2 x) = \cos^2 2x (\sin x \cos x)^2$$

$$= \cos^2 2x \left(\frac{1}{2} \sin 2x\right)^2 = \frac{1}{4} (\sin 2x \cos 2x)^2 = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2} \sin 4x\right)^2 = \frac{1}{16} \sin^2 4x$$

$$f\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{1}{16} \sin^2 \frac{\pi}{3} = \frac{1}{16} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{64}$$

۲۹- در یک بیضی، $F(3, -2)$ و $F'(2, 1)$ کانون‌های آن و نقطه $M(1, 0)$ یکی از نقاط بیضی است. طول قطر کوچک بیضی چقدر است؟

$2\sqrt{2}$ (۴)

$\sqrt{2}$ (۳)

$3\sqrt{2}$ (۲)

$2\sqrt{3}$ (۱)

پاسخ: گزینه ۴

مجموع فواصل هر نقطه روی بیضی تا دو کانون برابر قطر بزرگ است.

$$2a = |MF| + |MF'| = \sqrt{1+1} + \sqrt{4+4} = \sqrt{2} + 2\sqrt{2} = 3\sqrt{2} \Rightarrow a = \frac{3}{2}\sqrt{2}$$

فاصله دو کانون را هم حساب می‌کنیم.

$$2c = |FF'| = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10} \Rightarrow c = \frac{\sqrt{10}}{2}$$

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow \left(\frac{3}{2}\sqrt{2}\right)^2 = b^2 + \left(\frac{\sqrt{10}}{2}\right)^2 \Rightarrow b^2 = \frac{9}{2} - \frac{5}{2} = 2 \Rightarrow b = \sqrt{2} \Rightarrow 2b = 2\sqrt{2}$$

۳۰- معادلات دو قطر دایره‌ای $\begin{cases} 3x + 2y = 0 \\ 2x - 3y = 13 \end{cases}$ است، اگر این دایره بر خط $y = \frac{3}{4}x - 1$ مماس باشد، معادله دایره کدام است؟

$25(x^2 + y^2 + 4x - 6y) + 129 = 0$ (۲)

$25(x^2 + y^2 - 4x + 6y) - 129 = 0$ (۱)

$25(x^2 + y^2 - 4x + 6y) + 129 = 0$ (۴)

$25(x^2 + y^2 - 4x - 6y) - 129 = 0$ (۳)

پاسخ: گزینه ۴

هرگونه انتشار و استفاده غیر قانونی از دوبینگ ماز با عدم رضایت گروه آموزشی ماز همراه بوده و شرعاً حرام است.



نکته: معادله دایره‌ای که مرکز آن (α, β) و شعاع آن r باشد، به صورت $(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = r^2$ می‌باشد. قطرهای دایره در مرکز دایره متقاطع‌اند. پس قطرهای را قطع می‌دهیم تا مرکز بدست آید.

$$\begin{cases} 3x + 2y = 0 \Rightarrow y = -\frac{3}{2}x \\ 2x - 3y = 13 \end{cases} \Rightarrow 2x - 3(-\frac{3}{2}x) = 13 \xrightarrow{\times 2} 4x + 9x = 26 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow y = -3$$

پس مرکز دایره $(2, -3)$ است. حال اگر فاصله مرکز دایره را تا خط مماس بر آن حساب کنیم، شعاع دایره بدست می‌آید.

$$y = \frac{3}{4}x - 1 \xrightarrow{\times 4} 3x - 4y - 4 = 0$$

$$r = \frac{|3(2) - 4(-3) - 4|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{14}{5}$$

معادله دایره برابر است با:

$$(x-2)^2 + (y+3)^2 = \frac{196}{25} \Rightarrow 25x^2 + 25y^2 - 100x + 150y + 129 = 0$$

biomaze.ir

هرگونه انتشار و استفاده غیر قانونی از دوپینگ ماز با عدم رضایت گروه آموزشی ماز همراه بوده و شرعاً حرام است.

